Uzavřené a otevřené množiny

2. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Teorie:

<u>**Definice**</u>

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Bod $x \in M$ nazveme **vnitřním bodem množiny M**, pokud existuje $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq M$. Množinu všech vnitřních bodů značíme $\operatorname{Int} M$.
Dále, **množina hraničních bodů množiny M** je

$$H(M) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \left[\forall r > 0 \colon \underline{B(x,r) \cap M \neq \emptyset} \wedge \underline{B(x,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset} \right] \right\}.$$

Uzávěr množiny M je pak definován jako $\overline{M} := M \cup H(M)$.
Dále pro $x \in \mathbb{R}^n$ definujme **vzdálenost bodu x od množiny M** jako

$$\varrho(x, M) := \inf\{\varrho(x, y) \colon\ y \in M\}$$

<u>**Věta**</u> (Definice uzavřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $H(M) \subseteq M$
- $\overline{M} = M$
- $\big(\{x_n\} \subseteq M,\ x_n \to x \in \mathbb{R}^n\big) \Rightarrow x \in M$
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varrho(x, M) = 0\}$
- $\mathbb{R}^n \setminus M$ je otevřená.

Splňuje-li množina M libovolnou z nich, říkáme o ní že je **uzavřená**.
Navíc, pro $M \subseteq \mathbb{R}^n$ platí, že $\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \varrho(x, M) = 0\}$.

<u>**Věta**</u> (Definice otevřené množiny)

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

- $\forall x \in M\, \exists r > 0 \colon\ B(x, r) \subseteq M$
- $\operatorname{Int} M = M$
- $\mathbb{R}^n \setminus M$ je uzavřená.

Splňuje-li množina M libovolnou z nich, říkáme o ní že je **otevřená**.

Příklady:

1. Nechť $F \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdná konečná. Je pak F otevřená/uzavřená? Jak vypadá $H(F), \overline{F}$ a $\operatorname{Int} F$?

2. U následujících množin rozhodněte, zdali jsou otevřené, zdali jsou uzavřené, a popište jak vypadá $H(F), \overline{F}$ a $\operatorname{Int} F$:

   a) $M := \left\{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\}$

   b) $M := \left\{\frac{1}{n}\colon\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$

   c) $M := \mathbb{N}$

   d) $M := \mathbb{Q}$

   e) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ x > 0, y \leq 0\right\}$

   f) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1\right\}$

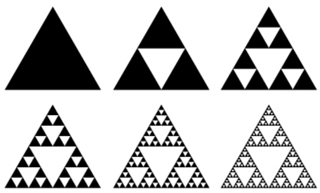
   g) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$

   h) $M := \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2\colon\ |x - y| = x - y\right\}$

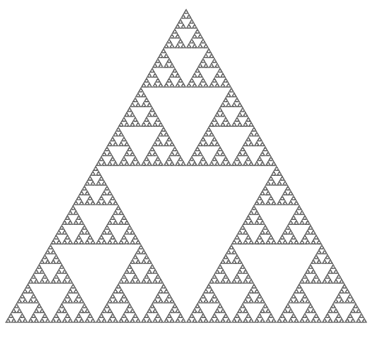
3. Existuje množina, která je otevřená i uzavřená?

∗ 4. Popište všechny podmnožiny $\mathbb{R}^n$, které jsou otevřené i uzavřené.

∗ 5. Sierpińského těsnění je fraktál definovaný jako průnik do sebe vnořených množin S_i, tedy $S := \bigcap_{k=1}^{\infty} S_i$, kde S_1 je trojúhelník, a S_{n+1} dostaneme z S_n odstraněním „prostředních otevřených trojúhelníků“. Je to vidět z obrázků (S_1 až S_6):



Celkem pak dostaneme množinu S:



Je S otevřená, případně uzavřená množina? Jak vypadají $H(S), \overline{S}$ a $\operatorname{Int} S$?

Uzavřené a otevřené množiny

1. cvičení

Matematika 2, NMMA702, Ondřej Bouchala

Výsledky:

1. F je uzavřená, není otevřená. $H(F) = \overline{F} = F$, $\operatorname{Int} F = \emptyset$.

2. a) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \overline{M} = M \cup \{0\}$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.
   b) Je uzavřená, není otevřená, $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.
   c) Je uzavřená, není otevřená, $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.
   d) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \overline{M} = \mathbb{R}$, $\operatorname{Int} M = \emptyset$.
   e) Není uzavřená ani otevřená, $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon (x = 0 \wedge y \leq 0) \vee (y = 0 \wedge x \geq 0)\}$.
   $\overline{M} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \leq 0\}$. $\operatorname{Int}(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0, y < 0\}$.
   f) Je otevřená, není uzavřená. $H(M) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\right\}$,
   $\overline{M} = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\right\}$, $\operatorname{Int}(M) = M$.
   g) Je uzavřená, není otevřená. $H(M) = \overline{M} = M$, $\operatorname{Int}(M) = \emptyset$.
   h) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq y\}$. Tedy M je uzavřená, není otevřená.
   $H(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\}$, $\overline{M} = M$, $\operatorname{Int}(M) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon x > y\}$.

3. Jediné takové podmnožiny $\mathbb{R}^n$ jsou $\emptyset$ a $\mathbb{R}^n$.